

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2021-2022

Prova scritta in aula del 12.07.2022

Parte II - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B , M_B .

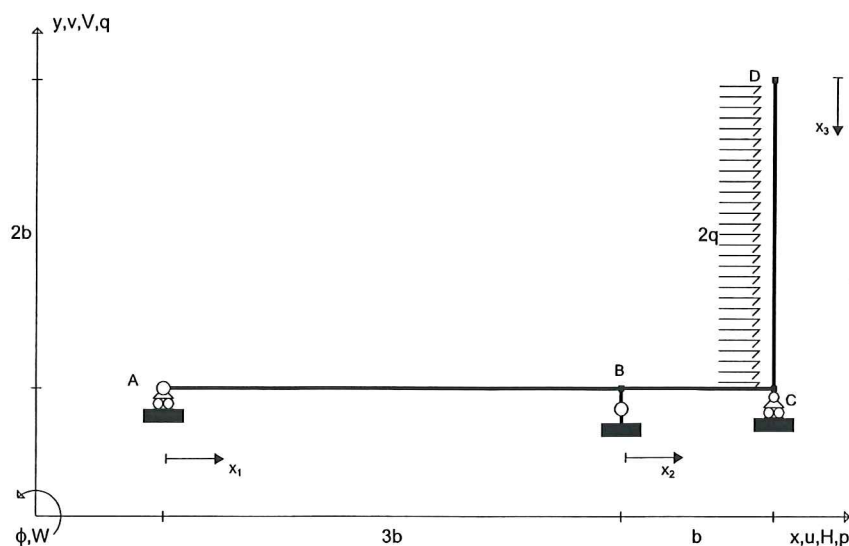
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto A , φ_A .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 12.07.22*001



EQ. CONGUENZA: $\Delta\varphi_B = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

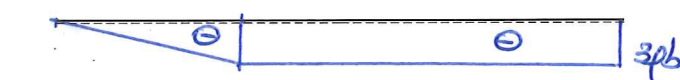
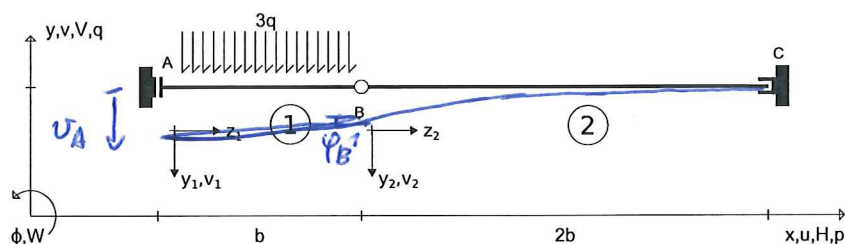
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

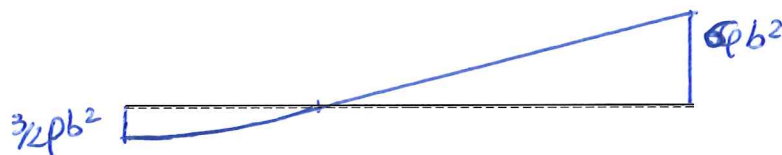
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto B relativa al corpo 1, φ_B' ;
4. Lo spostamento verticale del punto A , v_A .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 12.07.22*001



$\uparrow (+) \downarrow$



$\circ (+) \circ$

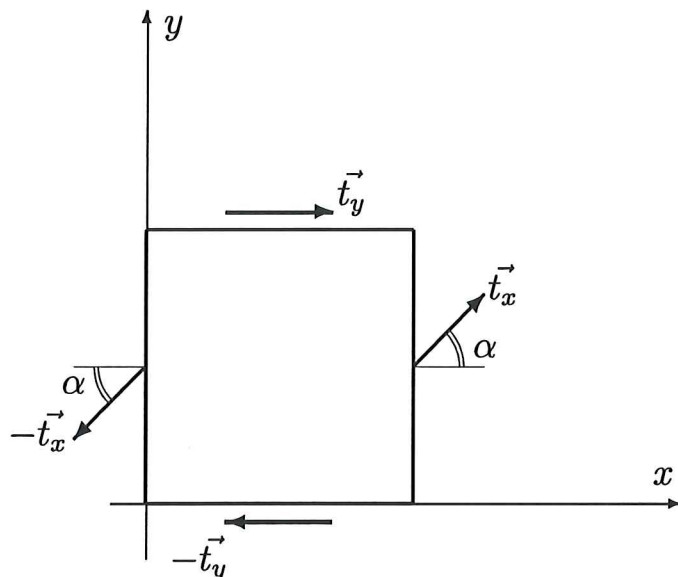
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & M_A (\curvearrowright) &= -\frac{3}{2}qb^2; & V_C (\uparrow) &= 3qb; & M_C (\curvearrowright) &= -6qb^2; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= -3qz_1; & M_{AB} &= \frac{3}{2}qb^2 - \frac{3}{2}qz_1^2; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= -3qb; & M_{BC} &= -3qbz_2; \\
 \text{c.c in } A &= v_1'(z_1=0)=0; & \text{c.c in } B &= v_1(z_1=b)=v_2(z_2=0); \\
 & \text{c.c in } C = v_2(z_2=2b)=0; & v_2'(z_2=2b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{3qb^2}{4}z_1^2 + \frac{q}{8}z_1^4 + \frac{69qb^4}{8} \right); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{3qb^2}{2}z_1 + \frac{q}{2}z_1^3 \right); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{q}{2}z_2^2 - 6qb^2z_2 + 8pb^4 \right); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{3qb}{2}z_2^2 - 6pb^3 \right); \\
 v_A &= \frac{69qb^4}{8EI} (\downarrow); & \varphi_B' &= -\frac{qb^3}{EI} (\downarrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) t_x e t_y , rispettivamente; di questi t_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 90^\circ$ (sicché $\cos \alpha = 0$; $\sin \alpha = 1$) e ha modulo di valore $|t_x| = 75$ MPa. L'altro vettore sforzo, t_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

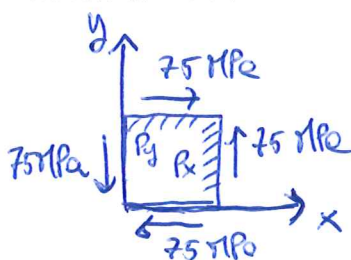
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$\sigma_x = \dots\dots\dots 0,000 \dots\dots\dots$ (MPa); $\sigma_y = \dots\dots\dots 0,000 \dots\dots\dots$ (MPa); $\tau_{xy} = \dots\dots\dots 75,000 \dots\dots\dots$ (MPa);

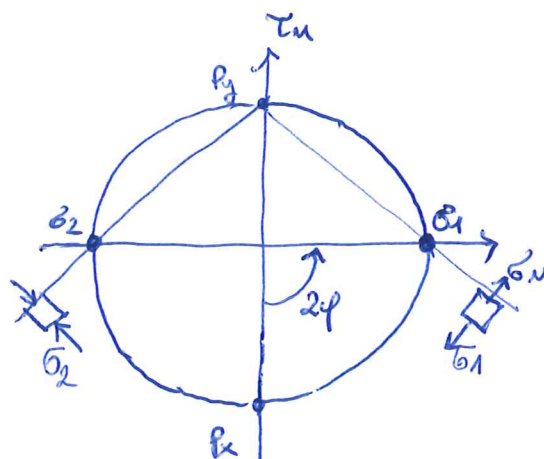
$\sigma_1 = \dots\dots\dots 75,000 \dots\dots\dots$ (MPa); $\sigma_2 = \dots\dots\dots -75,000 \dots\dots\dots$ (MPa); $\tau_{\max} = \dots\dots\dots 75,000 \dots\dots\dots$ (MPa);

cerchio di Mohr:

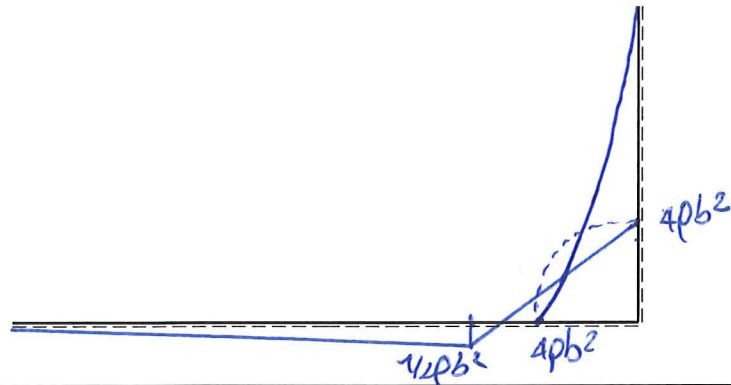
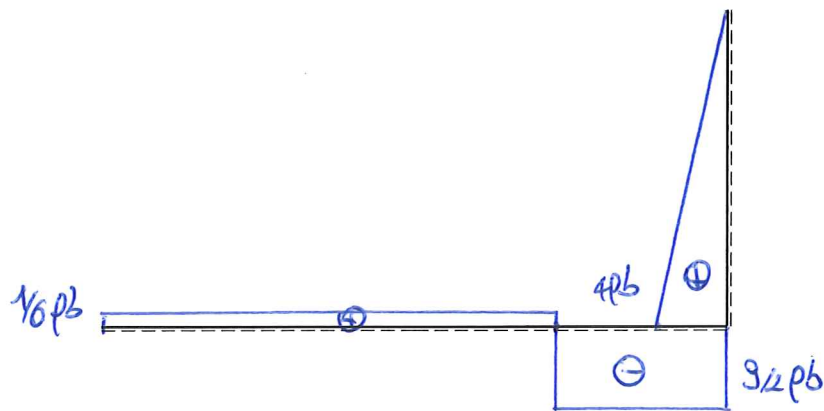
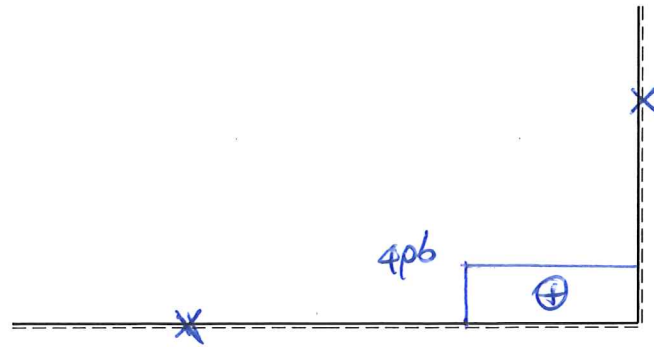
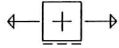


$P_x = (0; -75)$

$P_y = (0; 75)$



$\varphi = \dots\dots\dots 45 \dots\dots\dots$ ($^\circ$);



$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= \frac{1}{6} qb; & H_B (\Rightarrow) &= -4qb; & V_B (\uparrow) &= -\frac{4}{3} qb; & V_C (\uparrow) &= \frac{3}{2} qb; & M_B (\curvearrowright) &= +\frac{1}{2} pb^2; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= \frac{1}{6} qb; & M_{AB} &= \frac{1}{6} qb \times 1; \\
 N_{BC} &= 4qb; & T_{BC} &= -\frac{9}{2} qb; & M_{BC} &= \frac{1}{2} qb^2 - \frac{3}{2} qb \times 2; \\
 N_{DC} &= //; & T_{DC} &= 2p \times 3; & M_{DC} &= -9 \times \frac{2}{3}; \\
 \varphi_A &= -\frac{qb^3}{48} \quad (2)
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2021-2022

Prova scritta in aula del 12.07.2022

Parte II - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B , M_B .

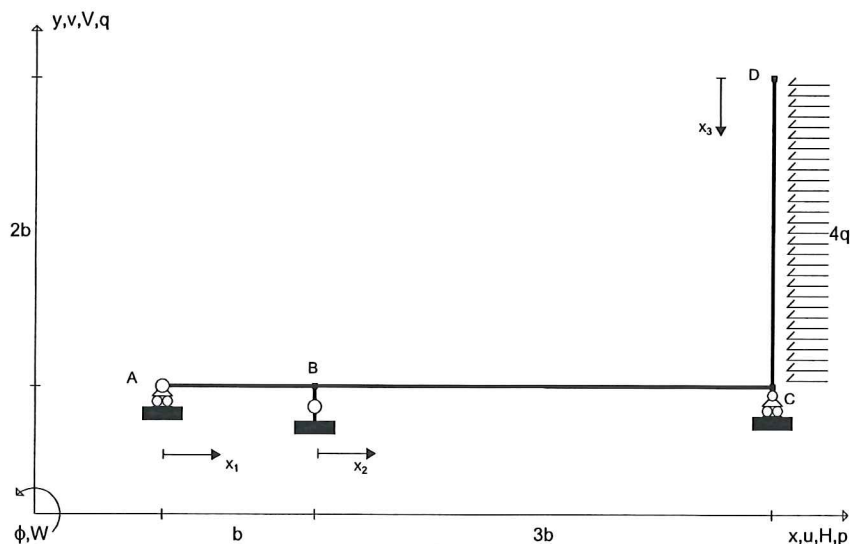
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto A , φ_A .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 12.07.22*002



Eq. CONGENENZA: $\Delta\varphi_B = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

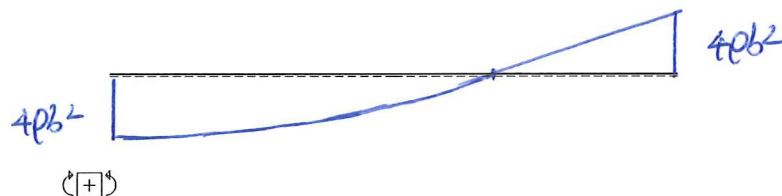
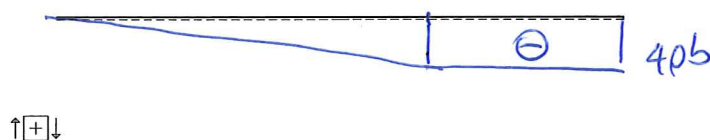
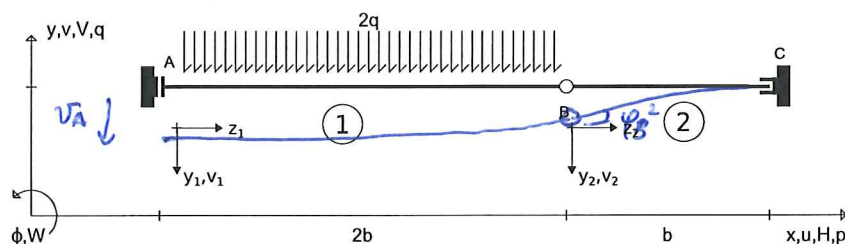
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti *A*, *B* e *C*.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto *B* relativa al corpo 2, φ_B^2 ;
4. Lo spostamento verticale del punto *A*, v_A .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 12.07.22*002



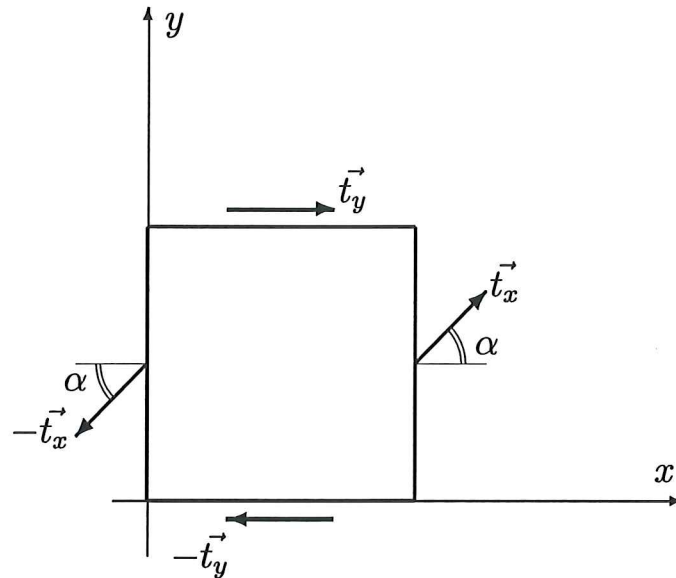
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & M_A (\curvearrowright) &= -4pb^2; & V_C (\uparrow) &= 4pb; & M_C (\curvearrowright) &= -4pb^2; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= -2pz_1; & M_{AB} &= 4pb^2 - pz_1^2; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= -4pb; & M_{BC} &= -4pbz_2; \\
 \text{c.c in A} &= v_1'(z_1=0)=0; & \text{c.c in B} &= v_1(z_1=2b) = v_2(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in C} &= v_2(z_2=b)=0; & v_2'(z_2=b) &= 0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(-2pb^2 z_1^2 + \frac{q}{12} z_1^4 + 8pb^4 \right); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(-4pb^2 z_1 + \frac{q}{3} z_1^3 \right); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{2pb}{3} z_2^3 - 2pb^3 z_2 + \frac{4pb^4}{3} \right); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(2pb z_2^2 - 2pb^3 \right); \\
 v_A &= \frac{8pb^4}{EI} (\downarrow); & \varphi_B^2 &= -\frac{2pb^2}{EI} (\downarrow)
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) t_x e t_y rispettivamente; di questi t_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = -90^\circ$ (sicché $\cos \alpha = 0$; $\sin \alpha = -1$) e ha modulo di valore $|t_x| = 75$ MPa. L'altro vettore sforzo, t_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

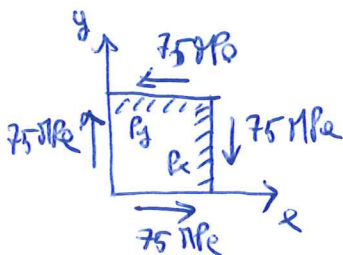
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$\sigma_x = 0,000$ (MPa); $\sigma_y = 9,000$ (MPa); $\tau_{xy} = -75,000$ (MPa);

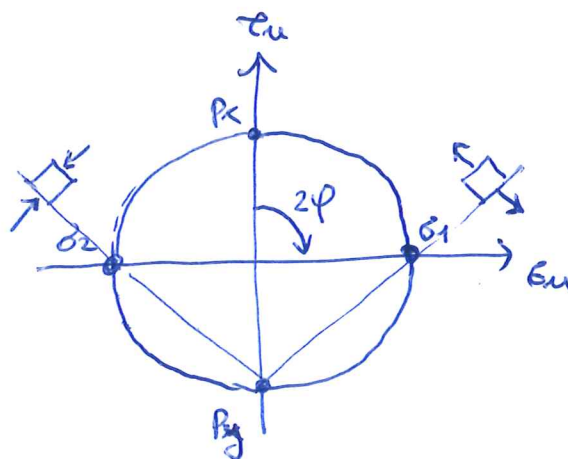
$\sigma_1 = 75,000$ (MPa); $\sigma_2 = -75,000$ (MPa); $\tau_{\max} = 75,000$ (MPa);

cerchio di Mohr:

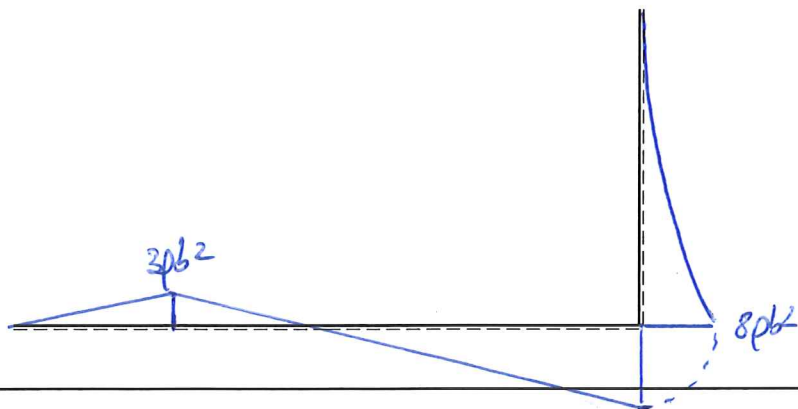
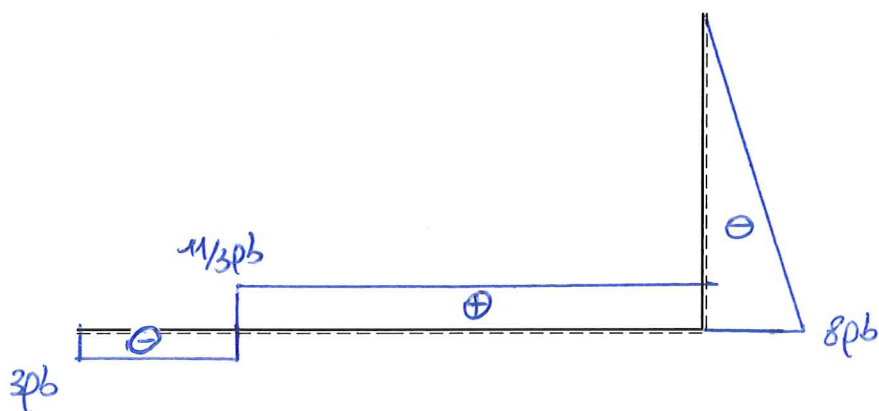
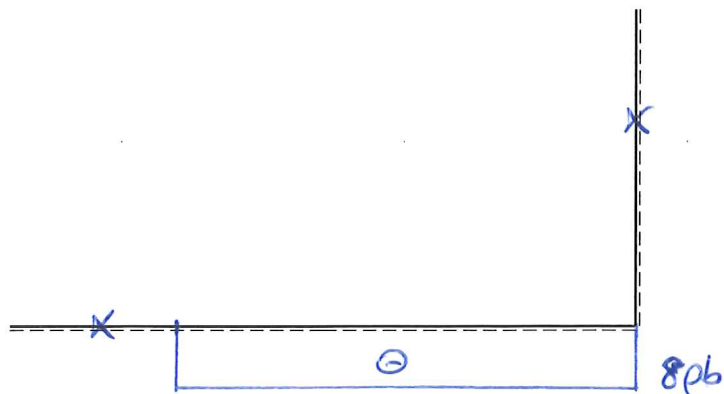
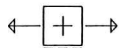


$p_x = (0; 75)$

$p_y = (0; -75)$



$\varphi = -45$ ($^\circ$);



$$\begin{aligned}
 V_A(\hat{u}) &= -3pb; & H_B(\hat{v}) &= 8pb; & V_B(\hat{u}) &= 20/3pb; & V_C(\hat{u}) &= -11/3pb; & M_B(\hat{v}, \hat{v}) &= -3pb^2; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= -3pb; & M_{AB} &= -3pbx_1; \\
 N_{BC} &= -8pb; & T_{BC} &= 11/3pb; & M_{BC} &= -3pb^2 + 11/3pbx_2; \\
 N_{DC} &= //; & T_{DC} &= 4p \times 3; & M_{DC} &= -29 \times 3^2; \\
 \varphi_A &= \frac{pb^3}{245} \quad (5)
 \end{aligned}$$